Test z matematyki
dla kandydatów do klasy uniwersyteckiej

Toruń, IV LO - 12 czerwca 2002

1. Niech a, b, c, d, e, f będą liczbami całkowitymi. Uzasadnić, że wśród nich można znaleźć takie dwie, których różnica jest podzielna przez 5.

2. Rozwiązać w liczbach całkowitych równanie
$$xy = x + y + 2.$$

3. Dla jakich wartości parametru a wykres funkcji $y = 3x + a$ ma punkty wspólne z czworokątem o wierzchołkach $(2, 0)$, $(0, 4)$, $(-2, 0)$ i $(0, -4)$?

4. Sporządzić wykresy funkcji $y = |x - 1|$ i $y = 12 - 2|x - 1|$. Następnie wyznaczyć pole figury ograniczonej tymi wykresami.

5. W trapezie równoramiennym podstawy mają długości a i $3a$. Wyznaczyć pole i obwód tego trapezu, jeśli jeden z jego kątów ma miarę $120°$.

6. W prostokącie $ABCD$, w którym $|AB| = 24$ cm i $|AD| = 10$ cm, przekątna AC dzieli ten prostokąt na trójkąty ABC i ADC. Wyznaczyć odległość między środkami okręgów wpisanych w powyższe trójkąty.

7. W sześcianie, którego krawędź ma długość 4 cm, środek każdej ściany połączono ze środkami ścian sąsiednich. Otrzymano w ten sposób układ krawędzi pewnego wielościanu. Co to jest za wielościan? Oblicz objętość i pole powierzchni całkowietj tego wielościanu.

8. Opisać sposób w jaki należy pobrać z rzeki dokładnie 6 litrów wody, jeżeli dysponujemy tylko dwoma naczyniami o pojemnościach 9 litrów i 4 litry.

Uwaga!
Rozwiązania powinny zawierać komentarze i uzasadnienia.

Życzymy powodzenia!

Test z matematyki dla kandydatów do klasy uniwersyteckiej
12 czerwca 2003

1. Wykorzystując wzory skróconego mnożenia przekształć następujące wyrażenie
$$\left(a+b-\frac{4ab}{a+b}\right):\left(\frac{a}{a+b}-\frac{b}{b-a}-\frac{2ab}{a^2-b^2}\right)$$
do możliwie najprostszej postaci. Następnie oblicz wartość wyrażenia dla $a=\frac{1}{2\sqrt{2}-3}$ i $b=\frac{2}{\sqrt{2}+1}$.

2. Długości boków równoległoboku $ABCD$ wynoszą $|AB|$ =7 cm i $|BC|$ =6 cm. Dwusieczne kątów wewnętrznych $\measuredangle DAB$ i $\measuredangle ABC$ podzieliły przeciwległy bok (CD) na trzy części. Oblicz długości tych części.

3. Wyznacz obwód i pole trójkąta prostokątnego, jeśli wiadomo, że r =4 cm, R =10 cm i r jest promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt, a R jest promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie.

4. Czy istnieje liczba naturalna, dla której iloczyn cyfr jest równy 77?

5. Dla jakich liczb całkowitych n liczba $\frac{3n+1}{n+1}$ jest liczbą całkowitą?

6. W sześcianie, którego krawędź ma długość 6 cm, dla ustalonego wierzchołka poprowadzono płaszczyznę przechodzącą przez punkty krawędzi sześcianu wychodzących z tego wierzchołka leżące w odległości od tego wierzchołka równej $\frac{1}{3}$ długości krawędzi. Płaszczyzna ta odcięła od sześcianu czworościan. Operację tę powtórzono dla każdego wierzchołka sześcianu. Opisz, jaki ostatecznie, po wszystkich odcięciach, wielościan otrzymano, tzn. ile ma ścian, krawędzi i wierzchołków. Oblicz jego objętość i pole powierzchni.

7. Oblicz pole trójkąta, którego wierzchołki są punktami przecięcia wykresów funkcji
$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{3}x+3 \\ y &= x+1 \\ y &= \frac{1}{2}x+4 \end{aligned}$$

8. Właściciel domu, chcąc oszczędzać energię elektryczną, dokonał trzech usprawnień w kolejnych trzech miesiącach. Usprawnienia te obniżyły wydatki na ogrzewanie domu kolejno: o 20%, o 25% i o 55%. O ile procent łącznie zmniejszyły się wydatki na ogrzewanie?

Uwaga!
Rozwiązania powinny zawierać komentarze i uzasadnienia.

Życzymy powodzenia

Test z matematyki
dla kandydatów do klasy uniwersyteckiej
Toruń, IV LO - 8 czerwca 2004

1. Na tablicy znajduje się liczba 23. Po minucie ścieramy ją i wpisujemy sumę iloczynu cyfr starej liczby i liczby 12, tzn. $2 \cdot 3 + 12 = 18$. Po następnej minucie tak samo postępujemy z otrzymaną liczbą. Tę procedurę wymazywania jednej liczby i wpisywania na jej miejsce nowej powtarzamy co minutę. Jaka liczba będzie na tablicy dokładnie po upływie 2 godzin od momentu rozpoczęcia całej procedury?

2. Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 12 i 16. Oblicz odległość między środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt i środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.

3. Dla jakich liczb całkowitych n liczba $\dfrac{n^2+4}{n-2}$ jest liczbą całkowitą?

4. Wyznacz wszystkie trójki liczb pierwszych $p,\ q,\ r$ spełniające równanie
$$19p - q \cdot r = 1995.$$

5. Sprowadź wyrażenie
$$\left(\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}\right):\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}\right)\right):\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$
do możliwie najprostszej postaci, a następnie oblicz wartość tego wyrażenia dla $a = 1\frac{33}{40}$, $b = 0,625$ i $c = 3,2$.

6. Dany jest sześcian, którego krawędź ma długość 6. Opisz wielościan, którego wierzchołkami są środki ścian tego sześcianu, tzn. podaj liczbę wierzchołków, ścian i krawędzi. Ponadto, oblicz objętość i pole powierzchni tego wielościanu.

7. Wierzchołkami trójkąta ABC są punkty przecięcia par prostych
$$-4x + 7y - 22 = 0,$$
$$12x - 5y - 30 = 0,$$
$$4x - 3y + 14 = 0.$$
Wyznacz wierzchołki tego trójkąta oraz oblicz najkrótszą wysokość w tym trójkącie.

Uwaga!
Rozwiązania powinny zawierać komentarze i uzasadnienia.

Życzymy powodzenia!

Test z matematyki
dla kandydatów do klasy uniwersyteckiej

15 czerwca 2004

1. Uprość wyrażenie
$$\left(\frac{1+x}{x^2-xy}-\frac{1-y}{y^2-xy}\right):\left(\frac{x+y}{y^2x-x^2y}\right).$$

2. Dwie cięciwy w okręgu przecinają się pod kątem prostym i dzielą okrąg na cztery łuki. Kąty środkowe oparte na najkrótszych łukach mają miarę 30^o i 45^o. Wyznacz kąty środkowe oparte na pozostałych łukach.

3. Wyznacz liczby trzycyfrowe, które są 12 razy większe od sumy swoich cyfr.

4. Wyznacz wszystkie trójki liczb pierwszych p, q, r takie, iż ich iloczyn jest pięć razy większy od ich sumy.

5. Wierzchołkami trójkąta ABC są punkty przecięcia par prostych
$$\begin{aligned} 4x-3y-14 &= 0 \\ 4x-7y-22 &= 0 \\ 12x-5y+30 &= 0 \end{aligned}$$
Wyznacz wierzchołki tego trójkąta, jego pole oraz wartości n, dla których prosta o równaniu $y=x+n$ ma co najmniej jeden punkt wspólny z tym trójkątem.

6. Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCDS$, w którym każda krawędź ma długość $6cm$. Każdą krawędź podzielono na trzy równe części, a następnie odcięto od ostrosłupa pięć ostrosłupów, których wierzchołkami są jeden z wierzchołków ostrosłupa $ABCDS$ oraz najbliższe mu punkty podziałów krawędzi wychodzących z tego wierzchołka.
   (a) Opisz powstały po odcięciach wielościan, tzn. podaj liczbę jego wierzchołków, krawędzi, ścian i określ, jakimi wielokątami są jego ściany.
   (b) Wyznacz objętość i pole powierzchni opisanego wielościanu.

7. Kilkoro dzieci zbierało orzechy włoskie. Zebrane orzechy podzieliły w następujący sposób: pierwsze dziecko otrzymało 60 orzechów i jeszcze $\frac{1}{21}$ tego co zostało, drugie dziecko 64 orzechy i $\frac{1}{21}$ tego co zostało, trzecie dziecko 68 orzechów i $\frac{1}{21}$ tego co zostało, itd. Po podzieleniu okazało się, że wszystkie dzieci otrzymały równą ilość orzechów. Ile wszystkich orzechów uzbierały dzieci i ile było dzieci, które zbierały orzechy?

Uwaga!
Rozwiązania powinny zawierać komentarze i uzasadnienia.

Życzymy powodzenia

Test z matematyki
dla kandydatów do klasy uniwersyteckiej
10 czerwca 2005

1. Ile dzielników ma liczba
$$\left(1+\frac{2}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{5}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{7}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{2}{2005}\right)?$$

2. W trójkącie, którego boki mają długości 6, 8, 10, wyznacz:
   (a) długości środkowej, wysokości i dwusiecznej poprowadzonych do najdłuższego boku,
   (b) długości promieni okręgu wpisanego w ten trójkąt i opisanego na tym trójkącie.

3. Oblicz pole trójkąta, którego boki zawarte są w wykresach funkcji
$$\begin{aligned} y &= x-2 \\ y &= -\frac{1}{2}x+4 \\ y &= -2x-5 \end{aligned}$$
   Ponadto wyznacz wartości współczynnika m tak, by wykres funkcji $y = mx - 4$ miał punkty wspólne z powyższym trójkątem.

4. Maharadża obdarował trzy córki perłami, które były przechowywane w szkatule. Najstarszej córce dał połowę zawartości szkatułki i jedną perłę. Drugiej córce dał połowę z tego, co zostało i jeszcze jedną perłę. Najmłodsza córka otrzymała połowę pozostałych i jeszcze trzy perły. W tym momencie szkatułka stała się pusta. Ile pereł miał Maharadża w szkatule?

5. Niech O będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Prosta AO przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie D różnym od A. Udowodnić, że $|OD| = |BD| = |CD|$.

6. W sześcianie, którego krawędź ma długość 6 cm, łączymy odcinkami środki każdej ze ścian z środkami ścian sąsiednich (mających wspólną krawędź z daną ścianą). Otrzymujemy układ krawędzi pewnego wielościanu. Co to za wielościan? Ile ma on krawędzi, wierzchołków i ścian? Oblicz jego pole powierzchni i objętość.

7. Czy zbiór liczb naturalnych $\{1, 2, 3, 4, \ldots, 32, 33\}$ można podzielić na 11 trójelementowych podzbiorów tak, by w każdym takim podzbiorze liczba największa była równa sumie dwóch pozostałych elementów tego podzbioru?

Uwaga!
Rozwiązania powinny zawierać komentarze i uzasadnienia.

Życzymy powodzenia

Test z matematyki
dla kandydatów do klasy uniwersyteckiej
15 czerwca 2005

1. Cena biletu na mecz piłki nożnej wynosiła 15 złotych. Gdy cenę obniżono, okazało się, że na mecz przychodzi o 50% widzów więcej, a dochód ze sprzedaży biletów wzrósł o 25%. O ile obniżono cenę biletu?

2. Stosując odpowiednie wzory skróconego mnożenia doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie
$$\left(\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}\right)\cdot\left(\frac{a^2+b^2}{2ab}+1\right)\cdot\frac{ab}{a+b},$$
a następnie oblicz wartość tego wyrażenia dla $a = 1,8$ i $b = 0,6$.

3. Sporządź wykresy funkcji: $y = x - 2$, $y = -x - 6$, i $y = 2 - |x|$. Oblicz pole figury ograniczonej wykresami tych funkcji. Ponadto ustal, dla jakich wartości współczynnika n wykres funkcji $y = 2x + n$ ma punkty wspólne z powyżej opisaną figurą.

4. W trójkącie jeden z boków ma długość 2, a kąty trójkąta przyległe do tego boku mają miary 30^o i 45^o. Wyznacz
   (a) długości pozostałych boków,
   (b) promień okręgu wpisanego w ten trójkąt,
   (c) długość środkowej poprowadzonej do boku długości 2.

5. W trójkącie dwa boki mają długość 6 i 12, kąt między nimi ma miarę 120^o. Wyznacz długość dwusiecznej tego kąta (tzn. odcinka od wierzchołka tego kąta do punktu przecięcia się z przeciwległym bokiem).

6. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wszystkie krawędzie mają tę samą długość 4 cm. Przez środki krawędzi wychodzących z tego samego wierzchołka poprowadzono płaszczyznę, która odcięła od ostrosłupa część zawierającą wierzchołek. Tak samo uczyniono z pozostałymi wierzchołkami. Otrzymano nowy wielościan. Opisz, ile on ma ścian, krawędzi i wierzchołków. Oblicz jego objętość i pole powierzchni.

7. Czy istnieją cztery kolejne liczby naturalne, których iloczyn jest 30 razy większy od ich sumy?

Uwaga!
Rozwiązania powinny zawierać komentarze i uzasadnienia.

Życzymy powodzenia

Test z matematyki
dla kandydatów do klasy uniwersyteckiej
9 czerwca 2006

1. Oblicz
$$\frac{666666 \cdot 666666}{1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1} - \frac{888888 \cdot 888888}{1+2+3+4+5+6+7+8+7+6+5+4+3+2+1} =$$

2. Oblicz pole figury ograniczonej wykresami funkcji:
$$\begin{aligned} y &= -x+5 \\ y &= -x-1 \\ y &= x-3 \\ y &= 5x+5 \end{aligned}$$

3. W trójkącie podstawa ma długość 60 cm. Wysokość opuszczona na tę podstawę ma długość 12 cm, a środkowa poprowadzona do tej podstawy ma długość 13 cm. Wyznacz długości pozostałych boków tego trójkąta i promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

4. Do trzech księgarni przywieziono łącznie 1948 książek. W kolejnych trzech dniach w pierwszej księgarni sprzedano, odpowiednio, $\frac{1}{37}$, $\frac{1}{11}$ i $\frac{1}{2}$ część otrzymanych książek, natomiast w drugiej księgarni w te same dni sprzedano $\frac{1}{57}$, $\frac{1}{9}$ i $\frac{1}{3}$ część dostarczonych książek. Trzecia księgarnia sprzedała w te dni, odpowiednio, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{30}$ i $\frac{1}{3}$ część swojej dostawy. Ile książek dostała każda z księgarni?

5. Dany jest trójkąt ABC. Prowadzimy dwusieczną AD kąta BAC, przy czym punkt D należy do boku BC. Środek okręgu wpisanego w trójkąt ABD pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wyznacz kąty trójkąta ABC.

6. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n, które spełniają równanie
$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} = 2005.$$

7. Ostrosłup prawidłowy czworokątny o podstawie $ABCD$ i wierzchołku S ma krawędź podstawy długości 6 cm i wysokość długości $3\sqrt{2}$ cm. Każda z krawędzi została podzielona na 3 równe części. Przy każdym z wierzchołków A, B, C, D i S odcięto ostrosłup, którego wierzchołkami są: dany wierzchołek i punkty podziału na krawędziach wychodzących z tego wierzchołka, położone najbliżej tego wierzchołka.
Dla otrzymanego wielościanu oblicz liczbę ścian, krawędzi, wierzchołków oraz pole powierzchni.

Uwaga!
Rozwiązania powinny zawierać komentarze i uzasadnienia.

Życzymy powodzenia

Test z matematyki
dla kandydatów do klasy uniwersyteckiej
13 czerwca 2006

1. Właściciel domu, chcąc oszczędzać energię elektryczną, dokonał kolejno trzech usprawnień, które obniżały wydatki na ogrzewanie domu, odpowiednio, o 20%, 25% i 55%. O ile procent zmniejszyły się jego wydatki na ogrzewanie domu po tych trzech usprawnieniach?

2. Wyznacz wszystkie liczby pięciocyfrowe $\overline{abcde}$, które dzielą się przez 36 i dla których prawdziwe są nierówności $a < b < c < d < e$.

3. Oblicz pole czworokąta $ABCD$, jeśli $A = (-2, -3)$, $B = (7, -4)$, $C = (1, 1)$, $D = (-1, 7)$. Wykresem jakiej funkcji jest prosta, na której leży przekątna AC?

4. Oblicz pole trapezu o podstawach długości 5 i 15 oraz przekątnych długości 12 i 16.

5. W ośmiokącie wypukłym wszystkie kąty wewnętrzne mają równe miary, natomiast długości boków są równe naprzemiennie $\sqrt{2}$ i 1. Oblicz pole tego ośmiokąta i długości jego przekątnych.

6. Oblicz
$$\sqrt{1 + 2007 \cdot \sqrt{1 + 2006 \cdot \sqrt{1 + 2005 \cdot \sqrt{1 + 2004 \cdot \sqrt{1 + 2003 \cdot 2001}}}}}$$

7. W sześcianie o krawędzi $\sqrt{3}$ zrzutowano prostopadle wszystkie wierzchołki na jedną z przekątnych. Na ile części rzuty podzieliły przekątną? Oblicz długość każdej z tych części.

Uwaga!
Rozwiązania powinny zawierać komentarze i uzasadnienia.

Życzymy powodzenia

Test z matematyki
dla kandydatów do klasy uniwersyteckiej
11 czerwca 2007

1. Oblicz

$$2\frac{1}{11}\cdot 2\frac{12}{13}+1\frac{2}{11}\cdot 2\frac{1}{13}+\frac{10}{11}\cdot 7\frac{1}{13}$$

2. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)\cdot\left(\frac{a+b}{2a}-\frac{b}{a+b}\right):\left[\left(a+2b+\frac{b^2}{a}\right)\cdot\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}\right)\right]$$

a następnie oblicz jego wartość dla $a=0,75$ i $b=\frac{4}{3}$.

3. Niech liczby p, q, r będą liczbami pierwszymi, które spełniają równość

$$p+q+r=pq+1.$$

   (a) Uzasadnij, że wśród tych liczb jest liczba parzysta.
   (b) Wyznacz wszystkie takie układy liczb.

4. Wyznacz pole trapezu o podstawach długości 5 cm i 15 cm oraz przekątnych długości 12 cm i 16 cm.

5. Oblicz pole trójkąta, którego boki leżą w wykresach funkcji:

$$\begin{aligned} y &= -x-4 \\ y &= -\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} \\ y &= -\frac{1}{8}x-3\frac{1}{8} \end{aligned}$$

6. Cena biletu na mecz piłki nożnej wynosiła 15 z. Gdy cenę obniżono, okazało się, że na mecz przychodzi o 50% widzów więcej, a dochód ze sprzedaży biletów wzrósł o 25%. O ile obniżono cenę biletu?

7. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wszystkie krawędzie mają długość $9cm$. Każdą z nich podzielono na trzy równe części. Następnie przy każdym wierzchołku ostrosłupa odcięto ostrosłup płaszczyzną wyznaczoną przez trzy punkty podziału najbliższe temu wierzchołkowi.

   (a) Opisz otrzymany wielościan. Ile ma ścian, krawędzi i wierzchołków?
   (b) Oblicz jego objętość.
   (c) Oblicz pole powierzchni całkowitej. (Ta część zadania nie jest obowiązkowa.)

Uwaga!
Rozwiązania powinny zawierać komentarze i uzasadnienia.

Życzymy powodzenia!

Test z matematyki
dla kandydatów do klasy uniwersyteckiej

Toru, IV LO - 18 czerwca 2007

1. Obliczyć
$$\frac{\left(1,88+2\frac{3}{25}\right)\cdot\frac{3}{16}}{0,625-\frac{13}{18}:\frac{26}{9}}+\frac{\left(\frac{0,216}{0,15}+0,56\right):0,5}{\left(7,7:24\frac{3}{4}+\frac{2}{15}\right)\cdot 4,5}.$$

2. Doprowadzić do najprostszej postaci wyrażenie
$$1-\frac{\frac{1}{x}-y}{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}:\frac{xy^2}{x^2y-y^2x},$$
a następnie obliczyć wartość tego wyrażenia dla
$$x=\frac{1}{\sqrt{2}-1}\quad \text{i} \quad y=\frac{1}{2+\sqrt{2}}.$$

3. Wyznaczyć wszystkie wartości b, dla których wykres funkcji $y=2x+b$ ma co najmniej jeden punkt wspólny z czworokątem o wierzchołkach w punktach $A=(5,1)$, $B=(1,4)$, $C=(-3,-2)$, $D=(2,-5)$. *Uwaga.* W rozwiązaniu można skorzystać z własności funkcji liniowej i postaci graficznej.

4. Dane są współrzędne trzech punktów $(5,-4)$, $(4,3)$, $(-3,2)$. Wyznaczyć wszystkie równoległoboki, dla których trzy spośród czterech wierzchołków znajdują się w podanych punktach. Oblicz obwody i pola tych równoległoboków. Czy są wśród nich romby lub prostokąty?

5. Uzasadnić, że jeśli liczby a, b, c, d, e są różnymi liczbami całkowitymi spełniającymi równanie
$$(4-a)(4-b)(4-c)(4-d)(4-e)=12,$$
to $a+b+c+d+e=17$.

6. Liczbę nazywamy *dobrą*, jeśli w jej zapisie dziesiętnym żadna z cyfr się nie powtarza oraz iloczyn cyfr jest równy 360. Podaj najmniejszą i największą liczbę dobrą.

7. Czterej rolnicy kupowali drzewka z działki doświadczalnej. Jeden kupił $\frac{1}{3}$ wszystkich drzewek i jeszcze 16. Drugi $\frac{1}{3}$ pozostałych drzewek z tej działki i jeszcze 16. Trzeci $\frac{1}{3}$ tego co zostało i jeszcze 16 sztuk. Czwarty kupił $\frac{1}{3}$ tego co pozostało po trzecim rolniku i zdecydował się kupić jeszcze 16 ostatnich drzewek. Ile drzewek rosło na działce doświadczalnej?

Uwaga!
Rozwiązania powinny zawierać komentarze i uzasadnienia.

Życzymy powodzenia!

Test z matematyki
dla kandydatów do klasy uniwersyteckiej
6 czerwca 2008

1. Czy istnieje liczba naturalna o tej własności, że iloczyn wszystkich jej cyfr jest równy 2008? Odpowiedź uzasadnij.

2. Czy istnieje graniastosłup o tej własności, że liczba będąca sumą liczby jego ścian, liczby jego wierzchołków i liczby jego krawędzi jest równa 2008? Odpowiedź uzasadnij.

3. Dany jest trójkąt o bokach długości 20, 20 i 32. Oblicz:
   (a) pole tego trójkąta,
   (b) wysokość opuszczoną na bok długości 20,
   (c) promień okręgu wpisanego w ten trójkąt i promień okręgu opisanego na tym trójkącie,
   (d) odległość między środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt i środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.

4. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie:
$$\left[\left(a+\frac{ab}{a-b}\right)\cdot\left(\frac{ab}{a+b}-a\right)\right]:\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$$
   a następnie oblicz jego wartość dla $a=-\frac{3}{4}$ i $b=2,25$.

5. W czworokącie $ABCD$ kąty wewnętrzne przy wierzchołkach B i D są proste oraz $|AD|=|DC|$. Ponadto punkt H leży na boku AB oraz $DH\perp AB$ i $|DH|=1$. Oblicz pole czworokąta $ABCD$.

6. Oblicz pole i obwód równoległoboku $ABCD$, jeśli

   $A=(-7,0)$; $B=(-1,8)$; $C=(4,-4)$; $D=(-2,-12)$.

7. Jesienią zgromadzono 100 kg ogórków, które zawierały 99% wody. Po pewnym czasie woda stanowiła 98 %. Ile wówczas ważyły ogórki?

Uwaga!
Rozwiązania powinny zawierać komentarze i uzasadnienia.

Życzymy powodzenia!

Test z matematyki
dla kandydatów do klasy uniwersyteckiej
13 czerwca 2008

1. Wierzchołki czworokąta leżą na okręgu o promieniu długości 12,5 cm. Wiadomo, że $|AB| = 24\ cm$, $|CD = 15\ cm$ oraz że przekątna AC przechodzi przez środek okręgu. Oblicz obwód i pole czworokąta $ABCD$.

2. Wyznacz wszystkie liczby pięciocyfrowe $\overline{abcde}$, które są podzielne przez 36 i dla których $a < b \leq c < d < e$.
   Zapis $\overline{abcde}$ oznacza liczbę
$$a \cdot 10^4 + b \cdot !0^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10 + e.$$

3. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p, dla których liczba $3p + 1$ jest kwadratem liczby naturalnej.

4. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie:
$$\left[\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2\right) \cdot \left(\frac{a+b}{2a} - \frac{b}{a+b}\right)\right] : \left[\left(a + 2b + \frac{b^2}{a}\right) \cdot \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b}\right)\right]$$
   a następnie oblicz jego wartość dla $a = 0,75$ i $b = \frac{4}{3}$.

5. W ostrokątnym trójkącie ABC poprowadzono wysokość CD. Niech K i L będą rzutami prostokątnymi punktu D odpowiednio na boki AC i BC trójkąta. Udowodnić, że punkty A, B, K, L leżą na jednym okręgu.

6. Wiemy, że 12 robotników może wykonać pewną pracę w ciągu 25 dni. Po 5 dniach liczbę robotników zwiększono i pracę ukończono cztery dni przed terminem. Ilu robotników przystąpiło dodatkowo do pracy?

7. Dany jest prostopadłościan o wymiarach 6 cm x 6 cm x 12 cm. środki wszystkich jego ścian są jedynymi wierzchołkami pewnego wielościanu. Ile ten wielościan ma wierzchołków, krawędzi i ścian? Oblicz objętość i pole powierzchni tego wielościanu.

Uwaga!
Rozwiązania powinny zawierać komentarze i uzasadnienia.

Życzymy powodzenia!

Test z matematyki
dla kandydatów do klasy uniwersyteckiej

Toru, IV LO - 29 maja 2009

1. Wnuczek ma tyle miesięcy, ile dziadek ma lat. Razem mają 65 lat. Ile lat ma dziadek, a ile lat ma wnuczek?

2. Uzasadnij, że czwarta potęga liczby nieparzystej pomniejszona o jeden jest liczbą podzielną przez 8, a nawet przez 16.

3. Wyrażenie algebraiczne

$$\left(x+y-\frac{4xy}{x+y}\right):\left(\frac{x}{x+y}-\frac{y}{y-x}+\frac{2xy}{x^2-y^2}\right)$$

   doprowadź do najprostszej postaci, a następnie oblicz jego wartość dla $x=\sqrt{2}-2,\ y=4+\sqrt{2}$.

4. Oblicz

$$\frac{6^{52}\cdot 5^{51}-6\cdot 3^{53}\cdot 10^{50}}{2^{52}\cdot 15^{50}+6^{50}\cdot 5^{51}}.$$

5. Punkty o współrzędnych $(-2,-3),\ (3,9),\ (6,5)$ są wierzchołkami pewnego równoległoboku. Wyznacz wszystkie równoległoboki, których trzy wierzchołki pokrywają się z podanymi punktami. Oblicz pola i obwody tych równoległoboków.

6. Dwie prostopadłe cięciwy dzielą okrąg na cztery łuki. Kąty środkowe oparte na łukach o mniejszych długościach mają miary 30° i 45°. Wyznacz miary kątów środkowych opartych na pozostałych łukach.

7. Adaś i Piotr piszą liczbę dwudziestocyfrową używając tylko cyfr $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$. Rozpoczyna Adaś pisząc pierwszą cyfrę od lewej strony. Następnie drugą cyfrę pisze Piotr, trzecią pisze znów Adaś itd. Adaś wygrywa, gdy napisana przez nich liczba nie jest podzielna przez 9. Czy Adaś może zagwarantować sobie wygraną niezależnie od sposobu gry Piotra?

Uwaga!
Rozwiązania powinny zawierać komentarze i uzasadnienia.

Życzymy powodzenia!

Test z matematyki
dla kandydatów do klasy uniwersyteckiej

Toru, IV LO – 5 czerwca 2009

1. Świeże grzyby zawierają 90% wody, a suszone tylko 12%. Ile świeżych grzybów należy ususzyć, aby otrzymać 5 kg grzybów suszonych?

2. Wyznacz wszystkie liczby siedmiocyfrowe podzielne przez 3 i przez 4, w zapisie których występują tylko cyfry 2 i 3, przy czym dwójek jest więcej niż trójek.

3. Oblicz
$$\frac{\sqrt{6,3\cdot 1,7}\left(\sqrt{\frac{6,3}{1,7}}-\sqrt{\frac{1,7}{6,3}}\right)}{\sqrt{(6,3+1,7)^2-4\cdot 6,3\cdot 1,7}}$$

4. Oblicz pole czworokąta $ABCD$, jeśli $A=(-2,-3)$, $B=(7,-4)$, $C=(1,1)$, $D=(-1,7)$.

5. Oblicz
$$2009\cdot\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2009^2}\right)$$

6. Bok prostokąta ma długość 24 cm, a jego przekątna ma długość 26 cm. Przekątna dzieli prostokąt na dwa trójkąty. W każdy z nich wpisujemy okrąg. Oblicz odległość między środkami tych okręgów.

7. Jak z cysterny mleka za pomocą dwóch naczyń o pojemności 17 litrów i 5 litrów odlać 13 litrów mleka? Nie wolno wylewać mleka poza naczynia i cysternę, i nie wolno rozlewać mleka. Opisz kolejne etapy przelewania.

Wszystkie odpowiedzi do zadań powinny być uzasadnione!

Życzymy powodzenia!

Test z matematyki
dla kandydatów do klasy uniwersyteckiej
Toru, IV LO - 21 maja 2010

1. Od środy do piątku Marek zawsze kłamie, a w pozostałe dni tygodnia zawsze mówi prawdę. Pewnego dnia Marek spotkał Marię i powiedział:
   - „Wczoraj kłamałem."
   - „Od pojutrza przez kolejne dwa dni będę kłamał."

   W jakim dniu tygodnia Marek spotkał Marię?
2. Uprość, a następnie oblicz wartość wyrażenia dla $a = 1 + \sqrt{2}$, $b = 2 - \frac{1}{3\sqrt{2}}$:
$$\frac{1}{4}\left[4\left(\frac{a}{2} - b\right)^2 - (a + 2b)(a - 2b)\right] - 2(b - a)^2.$$
3. Długość podstawy CD trapezu $ABCD$ jest równa długości ramienia AD i jest dwukrotnie mniejsza od długości podstawy AB. Wyznaczyć miarę kąta ACB.
4. Pewną działkę Adam przekopie w ciągu 10 godzin, Bartek w ciągu 8 godzin, a Cezary w ciągu 4 godzin.
   (a) Czy pracując wspólnie przekopią całą działkę w ciągu 2,5 godziny?
   (b) Czy pracując wspólnie przekopią całą działkę w ciągu 2 godzin?
5. Punkty $A(-15, 0)$, $B(0, 0)$, $C(48, 20)$, $D(0, 20)$ są wierzchołkami czworokąta $ABCD$.
   (a) Oblicz promienie okręgów wpisanych w trójkąty ABD i BCD.
   (b) Oblicz odległość między środkami tych okręgów.
6. Z sześciennego drewnianego klocka o krawędziach długości 6 odcięto wszystkie narożniki w kształcie ostrosłupów prawidłowych trójkątnych o krawędziach bocznych długości 2. O ile procent zmniejszyła się objętość bryły?
7. Dwaj szachiści rozegrali pewną ilość partii. Za wygraną zawodnik otrzymuje 3 punkty, za przegraną 1 punkt, a za remis 2 punkty. Mecz zakończył się wynikiem 38 : 42 lub 36 : 46. Jak można uzasadnić, że jeden z tych wyników jest niemożliwy?

Uwaga!
Rozwiązania powinny zawierać komentarze i uzasadnienia.

Życzymy powodzenia!

Test z matematyki
dla kandydatów do klasy uniwersyteckiej

Toru, IV LO - 28 maja 2010

1. Piotr ma 153 cm wzrostu i jest niższy od Marcina o 15%. Gdy Piotr stanął na słupku, to okazało się, że jest wyższy od Marcina o 15%. Jaka była wysokość słupka?

2. Rozwiąż równanie
$$0,16 : \left[\frac{(0,2x+0,6)\cdot\frac{2}{3}}{0,125} - 2,4\right] = 0,04$$

3. W trójkącie ABC dwusieczna poprowadzona z wierzchołka A, symetralna boku AB i wysokość opuszczona z wierzchołka B przecinają się w jednym punkcie. Wyznacz miarę kąta $\angle BAC$.

4. Przy ładowaniu dużego statku na początku pracowały przez jedną godzinę trzy jednakowe dźwigi nośne, a następnie dołączono jeszcze trzy dźwigi większej mocy i po dwóch godzinach wspólnego działania tych wszystkich dźwigów statek został załadowany. Gdyby te dźwigi zaczęły działać jednocześnie, wówczas załadowanie statku byłoby zakończone po upływie 2 godzin i 24 minut. Ile czasu zajęłoby załadowanie statku przez pojedynczy dźwig mniejszej mocy, a ile - przez pojedynczy dźwig większej mocy?

5. Punkty $A(-8,-1)$, $B(5,2)$, $C(-2,4)$, są wierzchołkami trójkąta ABC. Oblicz pole tego trójkąta oraz zbadaj, który z boków jest dłuższy: bok AB czy bok AC.

6. Sześciokąt $ABCDEF$ ma tę własność, że każde jego dwa sąsiednie boki tworzą kąt prosty. Ponadto wiadomo, że każdy bok jest innej dugości oraz że długości boków ustawione nie kolejno, lecz w porządku rosnącym stanowią ciąg: 3, 4, 6, 8, 9, 12.
   (a) Narysuj sześciokąt $ABCDEF$ o podanych wyżej własnościach.
   (b) Czy potrafisz wskazać więcej niż jeden taki sześciokąt? Rozstrzygnij, ile jest takich szesciokątów.

7. Nauczyciel zadał kolejno po jednym przykładzie z tabliczki mnożenia w zakresie do 100 Adamowi, Markowi, Olkowi, Pawłowi i Tomkowi. Każdy z nich udzielił poprawnej odpowiedzi. Przy tym okazało się, że u każdego kolejnego ucznia wynik był półtora raza większy, niż u poprzedniego. Jakie liczby mnożył Paweł?

Uwaga!
Rozwiązania powinny zawierać komentarze i uzasadnienia.

Życzymy powodzenia!

Test z matematyki

dla kandydatów do klasy uniwersyteckiej

Toruń, IV LO, 20 maja 2011

Zad. 1. Partia nasion zawiera 20% zanieczyszczeń. Wstępne oczyszczenie usunęło połowę zanieczyszczeń. Jaki procent stanowią zanieczyszczenia pozostałe po wstępnym oczyszczeniu?

Zad. 2. Między cyfry licznika i między cyfry mianownika ułamka $\frac{34}{67}$ wstaw taki sam układ dwóch cyfr zapisanych w tej samej kolejności tak, aby ten ułamek nie zmienił swojej wartości.

Zad. 3. Boki trójkąta mają długości $a = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$, $b = 2^2 \cdot 37$, $c = 2^4 \cdot 3$.

(a) Uzasadnij, że trójkąt jest prostokątny.

(b) Wyznacz długość promienia okręgu stycznego do obu przyprostokątnych wiedząc, że środek tego okręgu leży na przeciwprostokątnej.

Zad. 4. Doprowadź do prostszej postaci wyrażenie algebraiczne, a następnie oblicz jego wartość dla $x = \frac{7-\sqrt{5}}{4}$ i $y = \frac{2-\sqrt{5}}{5}$:

$$\left[(x - \frac{1}{2}y)(2x + y) - \frac{3}{2}y^2\right] - 2(x - 2y)^2.$$

Zad. 5. Trzej kosiarze pracując jednocześnie skoszą całą łąkę w ciągu 10 godzin. Jeden z nich może skosić całą łąkę w ciągu 24 godzin, drugi w ciągu 30 godzin. W jakim czasie może skosić łąkę sam kosiarz trzeci, a w jakim kosiarz drugi i trzeci razem?

Zad. 6. Trójkąt ma wierzchołki $A(-2, -3)$, $B(-2, 7)$, $C(4, 12)$. Podaj długości dwóch wybranych przez siebie wysokości trójkąta.

Zad. 7. Na globusie w kształcie kuli o promieniu R zakreślono cyrklem o rozwartości R okrąg, nóżkę cyrkla umieszczając na biegunie. Jaka jest długość narysowanego równoleżnika?

Wszystkie odpowiedzi do zadań powinny być uzasadnione!

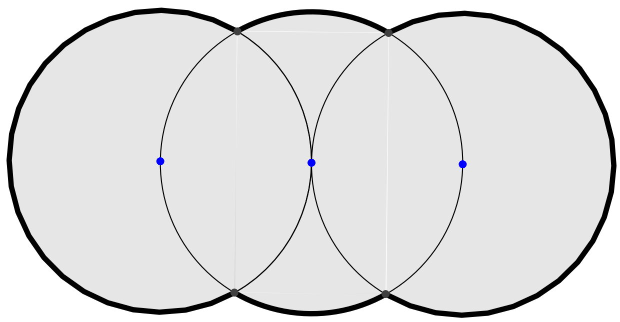
Życzymy powodzenia!

Test z matematyki
dla kandydatów do klasy uniwersyteckiej
Toruń, IV LO - 27 maja 2011

1. Jedenaście liczb zapisanych jest jedna za drugą w jednym wierszu. Wiadomo, że suma każdych trzech kolejnych liczb jest równa 100, przy czym pierwsza z nich jest równa 26, a ostatnia 13. Wyznaczyć pozostałe liczby.

2. Wczoraj w klasie uczniów obecnych było 8 razy tyle co nieobecnych. Dzisiaj nie przyszło jeszcze dwóch uczniów i teraz nieobecni stanowią 20% uczniów obecnych. Ilu uczniów jest w tej klasie?

3. Z trzech okręgów o jednakowych promieniach równych 1 dwa są styczne zewnętrznie, a trzeci ma środek w punkcie ich styczności. Oblicz obwód i pole otrzymanego w ten sposób obszaru.



4. Dane są punkty $A(-3, -4)$ i $B(4, 11)$. Podaj współrzędne punktów, w których odcinek AB przecina osie Ox i Oy.

5. Gdyby Aleksander Wielki umarł o 5 lat wcześniej, panowałby tylko $\frac{1}{4}$ swojego życia, gdyby zaś żył o 9 lat dłużej panowałby połowę swojego życia. Ile lat żył i ile panował?

6. Sprowadź wyrażenie
$$\left(a^2 + (b+1)(b-1)\right)\left((a-1)(a+1) - b^2\right)$$
do możliwie najprostszej postaci, a następnie oblicz wartość tego wyrażenia dla $a = \sqrt{\sqrt{2}+1}$, $b = \sqrt{\sqrt{2}-1}$.

7. Objętość prawidłowego ostrosłupa sześciokątnego jest równa 6. Krawędź podstawy ma długość 1. Oblicz długość krawędzi bocznej ostrosłupa.

Uwaga!
Rozwiązania powinny zawierać komentarze i uzasadnienia.

Życzymy powodzenia!

Test z matematyki
dla kandydatów do klasy uniwersyteckiej

Toruń, IV LO - 18 maja 2012

1. Punkt $A(-1,-3)$ odbito symetrycznie względem prostej równoległej do osi Oy i przecinającej oś Ox w punkcie $(4,0)$. W ten sposób otrzymano punkt B. Punkt C jest symetryczny do punktu B względem punktu $S(2,3)$. Oblicz pole trójkąta ASC oraz długość boku AC.

2. Uprość wyrażenie, a następnie oblicz jego wartość liczbową dla $a = \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}$ i $b = \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$

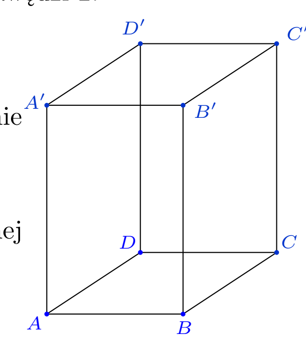
$$(2a-b)^2 + 8\left(a - \frac{b}{2}\right)\left(a + \frac{b}{2}\right) + (b+2a)^2 .$$

3. Która z liczb $2 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{4}}}}$ czy $2 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{5}}}}$ jest większa?

4. W równoległoboku $ABCD$ bok AB ma długość 4, a bok AD ma długość 2. Punkt P jest środkiem odcinka AB. Oblicz miarę kąta CPD, a następnie oblicz pole koła opisanego na trójkącie CPD.

5. Robotnik kopał dół. Na zapytanie przechodnia, jak głęboki będzie dół, który on kopie, odpowiedział: „Mój wzrost wynosi 1 m 80 cm. Gdy wykopię dół do końca, moja głowa będzie o tyle poniżej powierzchni ziemi, o ile teraz, gdy już wykopałem połowę głębokości dołu, jest powyżej niej”. Jaka będzie głębokość dołu?

6. Z drewnianego prostopadłościanu $ABCDA'B'C'D'$ o wymiarach $|AB| = 3$, $|AD| = 4$, $|AA'| = 5$ wycięto w narożnikach A i C' sześciany o krawędzi 2.
   (a) Narysuj otrzymaną bryłę.
   (b) Jakie różne kształty „pieczątek” na piasku można odcisnąć przykładając do jego powierzchni odpowiednie „ściany” otrzymanej bryły.
   (c) Jakie jest pole całkowite otrzymanej bryły?
   (d) Jakiej długości krawędzie można dostrzec w otrzymanej bryle i ile ich jest?



7. Każda z osób A, B, C albo jest prawdomówna, czyli zawsze mówi prawdę, albo jest kłamcą, czyli zawsze kłamie.
   Osoba A powiedziała: My wszyscy jesteśmy kłamcami.
   Osoba B powiedziała: Dokładnie dwie osoby spośród nas to kłamcy.
   Która osoba kłamie, a która mówi prawdę?

Uwaga!
Rozwiązania powinny zawierać komentarze i uzasadnienia.

Życzymy powodzenia!

Test z matematyki
dla kandydatów do klasy uniwersyteckiej
Toruń, IV LO - 4 czerwca 2012

1. Porównaj liczby:
$$\left[\left(2^{50}+2^{100}\right)^2-\left(2^{50}-2^{100}\right)^2\right]:8^{50} \qquad \text{i} \qquad \sqrt{4-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{4+2\sqrt{2}}\,.$$

2. Jeśli w pewnej liczbie dwucyfrowej zamienimy kolejność cyfr, to otrzymamy liczbę o 75% większą od pierwotnej. Jaka to liczba?

3. Dla ekspedycji naukowej składającej się z 20 osób przygotowano na 18 dni między innymi 24 kg cukru i 90 kg sucharów. Ile cukru i sucharów należy przygotować dla 25 osób, które wyruszą na 20 dni? O ile wzrosłoby zapotrzebowanie na cukier i suchary dla tych 25 osób, jeśli normę na każdego uczestnika zwiększono by o 10%?

4. Pole równoległoboku $ABCD$ jest równe 1. Punkt K jest środkiem boku BC. Prosta AK przecina przekątną BD w punkcie L. Oblicz pole czworokąta $LKCD$.

5. Prosta l przechodzi przez punkty $(0,0)$ i $(1,1)$. Punkt A' jest symetryczny do punktu $A(6,3)$ względem prostej l, punkt B' jest symetryczny do punktu $B(-2,-1)$ względem tej samej prostej. Oblicz długość odcinka $A'B'$ oraz pole czworokąta $AA'BB'$.

6. Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny o podstawie $ABCD$ i wierzchołku S. Punkt X jest środkiem krawędzi AB, a punkt Y jest środkiem krawędzi AD. Przez prostą XY poprowadzono płaszczyznę równoległą do wysokości SS' ostrosłupa. Płaszczyzna ta przecina krawędź AS w punkcie Z.
   (a) Jaką część objętości ostrosłupa $ABCDS$ stanowi objętość ostrosłupa $AXYZ$?
   (b) Opisany powyżej ostrosłup $AXYZ$ odcięto od ostrosłupa $ABCDS$, a następnie wykonano analogiczne cięcia przy wierzchołkach B, C i D. Ile ścian i ile krawędzi ma otrzymana po tych cięciach bryła zawierająca wierzchołek S? Jakimi wielokątami są ściany boczne otrzymanej bryły?

7. Pięć osób siedzi przy okrągłym stole. Są wśród nich wyłącznie kłamcy oraz prawdomówni. Kolejno każdy z nich stwierdza: „Obaj moi sąsiedzi to kłamcy". Zakładając, że kłamca zawsze kłamie, a prawdomówny zawsze mówi prawdę i że każdy dokładnie wie, czy jego sąsiedzi są kłamcami czy nie, powiedz ile osób siedzi przy stole?

Uwaga!
Rozwiązania powinny zawierać komentarze i uzasadnienia.

Życzymy powodzenia!

Test z matematyki
dla kandydatów do klasy uniwersyteckiej

Toruń, IV LO - 25 maja 2012

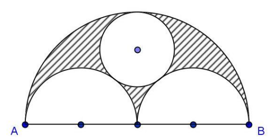
1. Uprość wyrażenie $\frac{x}{2} \cdot (x^2 - y^2) - \frac{y}{2} \cdot (y+x)(y-x) - \frac{(x-y)(x+y)^2}{2}$.

2. Dwóch robotników pracując razem wykonuje pewną pracę w ciągu 12 dni. Jeżeli pierwszy będzie pracował 2 dni, a następnie drugi 3 dni, to wykonają oni tylko 20% całej pracy. Przez ile dni wykonywałby tę pracę każdy z tych robotników pracując samodzielnie?

3. Oblicz x, jeśli $2,58 : \left(5,3 - 2,5 \cdot \frac{\frac{4}{5} - 1,2x}{\frac{3}{4} : \frac{3}{2}}\right) = 0,6$.

4. Liczbę $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 30}{2^{20} \cdot 3^{20}}$ zapisano w postaci ułamka nieskracalnego. Jaki otrzymano mianownik?

5. Wiedząc, że długość odcinka AB jest równa 40 oblicz pole zamalowanej części figury.

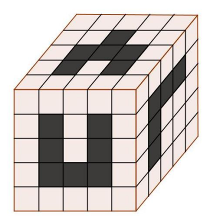


6. W jednym wierszu wypisano po kolei wszystkie liczby całkowite dodatnie zaczynając od 1.

   1234567891011121314 . . .

   Jaka cyfra znajduje się na miejscu 2012.

7. W sześcianie zbudowanym z 125 kostek jednostkowych usunięto niektóre kostki tworząc tunele na wylot. Kształty tuneli widoczne są na rysunku obok. Ile kostek jednostkowych usunięto?



Uwaga!
Rozwiązania powinny zawierać komentarze i uzasadnienia.

Życzymy powodzenia!

Test z matematyki
dla kandydatów do klasy uniwersyteckiej
Toruń, IV LO - 7 czerwca 2013

1. Uprość wyrażenie, a następnie oblicz jego wartość dla $a = \sqrt{7+\sqrt{5}}, \quad b = 7-\sqrt{5}$,
$$\frac{(a^2b-b^2)(a^2b+b^2)+b^4}{(a^2+b)^2-(a^2-b)^2}.$$

2. Wierzchołek A trójkąta ABC ma współrzędne $(1,-2)$. Punkt $X=(4,0)$ jest środkiem boku AB, punkt $Y=(-3,1)$ jest środkiem boku AC. Oblicz pole trójkąta ABC oraz długość odcinka BC.

3. Dwie książki łącznie kosztowały 46 zł. 40 procent ceny jednej książki stanowiło 75 procent ceny drugiej książki. Tańsza książka potaniała o 20%, a droższa podrożała o 20%. Jakie były ceny książek przed zmianiami i po zmianach cen.

4. 11 cyfrowa liczba $\overline{a20132014b2}$ dzieli się przez 36. Znajdź wszystkie cyfry, którymi można zastąpić litery a i b.

5. W trójkącie prostokątnym ABC o bokach długości $|BC|=12$, $|AC|=20$ poprowadzono symetralną przeciwprostokątnej AC. Przecięła ona bok AB w punkcie D. Oblicz w jakim stosunku symetralna podzieliła punktem D bok AB oraz długość odcinka łączącego punkt D ze środkiem przeciwprostokątnej.

6. Siedem tomów książek stojących na półce w porządku 1562437 trzeba ustawić we właściwej kolejności (od tomu 1 do tomu 7). Czy można to uczynić w taki sposób, że będziemy przenosić zawsze dokładnie trzy sąsiednie tomy i wstawiać je w dowolne miejsce nie zaburzając ich kolejności.

7. Dany jest czworościan foremny o krawędzi 6. Wybieramy jeden z jego wierzchołków. Na każdej z 3 krawędzi wychodzących z tego wierzchołka zaznaczamy punkt w odległości 1 od tego wierzchołka, a następnie odcinamy narożnik płaszczyzną przechodzącą przez te trzy punkty. Tą samą czynność powtarzamy dla wszystkich pozostałych wierzchołków czworościanu.
   - Jakimi wielokątami są ściany otrzymanej figury i jakie są ich kąty wewnętrzne.
   - Oblicz pole powierzchni otrzymanej bryły.
   - Narysuj przykład siatki otrzymanej bryły.

Uwaga!
Rozwiązania powinny zawierać komentarze i uzasadnienia.

Życzymy powodzenia!

Test z matematyki
dla kandydatów do klasy uniwersyteckiej
Toruń, IV LO - 14 czerwca 2013

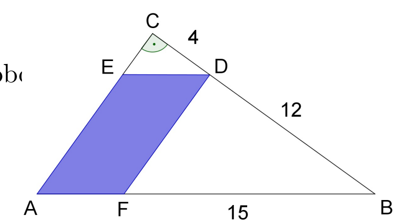
1. Uprość wyrażenie, a następnie oblicz jego wartość dla $x = 2^{10},\ y = 2^{20}$,
$$\frac{(3x-y^2)(3x+y^2)-(2x-y^2)^2-5x^2}{(x+1)^2-x^2-(y^2+1)}.$$

2. Podstawę trójkąta równoramiennego ABC stanowi odcinek AB, przy czym $A = (1,2),\ B = (9,4)$. Wiadomo, że pierwsza współrzędna wierzchołka C jest równa 1. Oblicz obwód trójkąta ABC.

3. Rozwiąż równanie z niewiadomą x:
$$\frac{3\frac{1}{3}\cdot 1{,}9+19{,}5 : 4\frac{1}{2}}{\frac{62}{75}-0{,}16} : x = \left(3\frac{1}{2}+4{,}1\right) : \frac{10}{19}.$$

4. Ile jest liczb 7 cyfrowych podzielnych przez 3, które zbudowane są z samych jedynek i zer.

5. Oblicz obwód i pole zacieniowanego równoległob na rysunku obok wiedząc, że $|FB| = 15,\ |BD| = 12,\ |DC| = 4$.



6. Były trzy jednakowe beczułki, a w nich znajdowały się różne ilości wody. Z pierwszej beczułki przelano do drugiej i do trzeciej beczułki tyle litrów wody, ile w każdej z nich początkowo było. Potem z drugiej beczułki przelano do trzeciej i do pierwszej tyle wody, że ilość wody w każdej z tych dwóch beczułek została podwojona. Wreszcie z trzeciej przelano do pierwszej i do drugiej tyle wody, ile w każdej z nich było. Wtedy okazało się, że w każdej z tych beczułek jest po 24 litry wody. Ile litrów wody było początkowo w każdej z tych beczułek?

7. Dany jest sześcian o krawędzi 6. Środki każdych dwóch sąsiednich ścian tego sześcianu łączymy odcinkiem. W ten sposób wewnątrz sześcianu otrzymujemy pewną bryłę.
   - Jakimi wielokątami są ściany otrzymanej bryły?
   - Ile ścian, krawędzi i wierzchołków ma ta bryła?
   - Oblicz pole powierzchni i objętość otrzymanej bryły.

Uwaga!
Rozwiązania powinny zawierać komentarze i uzasadnienia.

Życzymy powodzenia!

Test z matematyki
dla kandydatów do klasy uniwersyteckiej
Toruń, IV LO - 30 maja 2014

1. Rozwiąż równanie
$$4{,}8 : \left[\frac{\left(\frac{1}{4}\cdot 11{,}2 - x\right)\cdot\frac{3}{4}}{\frac{1}{3}} + 2{,}4\right] = 0{,}8.$$

2. Zapisz wyrażenie w prostszej postaci, a następnie oblicz jego wartość dla $a = 2 - \sqrt{6},\ b = \sqrt{2}$
$$\frac{2a^2 + 1 - (a^2+1)^2}{(2a+b-1)(2a-b+1) + (b-1)^2}.$$

3. Punkty $A = (-2,-6),\ B = (-2,4)$ i $C = (6,-2)$ są wierzchołkami trójkąta ABC.
   - Oblicz obwód trójkąta ABC.
   - Wylicz długość wysokości trójkąta poprowadzonej z wierzchołka B.
   - Jakie własności ma trójkąt ABC? Odpowiedź uzasadnij.

4. Podziel odcinek długości 12,48 m na cztery odcinki tak, aby stosunek długości pierwszego do drugiego był równy $\frac{3}{5}$, drugiego do trzeciego $\frac{5}{7}$, a trzeciego do czwartego $\frac{5}{9}$.

5. Cena biletu na koncert wynosia 20 zł. Po obniżce liczba słuchaczy na następnym koncercie wzrosła o 25%, a dochód z koncertu wzrósł o 12,5%. Jaka była nowa cena biletu?

6. Punkty $B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4,\ B_5,\ B_6$ są środkami boków $A_1A_2,\ A_2A_3,\ A_3A_4,\ A_4A_5,\ A_5A_6$ i A_6A_1 sześciokąta foremnego $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.
   - Jakie własności ma sześciokąt $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$? Podaj je i uzasadnij.
   - Ile razy mniejszy jest obwód mniejszego sześciokąta od obwodu sześciokąta większego?
   - Ile razy większe jest pole sześciokąta większego od pola sześciokąta mniejszego?

7. Na prostej a zaznaczono 5 różnych punktów $X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5$, natomiast na równoległej do niej innej prostej b zaznaczono 6 różnych punktów $Y_1,\ Y_2,\ Y_3,\ Y_4,\ Y_5,\ Y_6$. Ile można utworzyć różnych trójkątów, których wierzchołkami są wymienione punkty? *UWAGA*: Dwa oznaczenia trójkątów wskazują równe trójkąty, jeśli w obu oznaczeniach występuje ten sam zestaw trzech wierzchołków, przy czym wierzchołki są wymienione być może w innej kolejności, np. $\triangle XYZ$ i $\triangle YZX$ są równe.

Uwaga!
Rozwiązania powinny zawierać komentarze i uzasadnienia.

Życzymy powodzenia!

Test z matematyki
dla kandydatów do klasy uniwersyteckiej

Toruń, IV LO - 6 czerwca 2014

1. Oblicz
$$\frac{4\cdot\left(0{,}125+\frac{3}{8}\right)}{\frac{7}{3}\cdot\left(1+\frac{2}{7}\right)-1\frac{2}{3}}-\frac{\frac{4}{5}\cdot\left(0{,}5\cdot 1{,}25+\frac{1}{2}\right)}{-2{,}25-\left(-\frac{11}{2}\right)\cdot 0{,}5}+1{,}2\cdot 1{,}25.$$

2. Zapisz wyrażenie w prostszej postaci, a następnie oblicz jego wartość dla $a=\sqrt{3},\ b=\sqrt{2}$
$$\left[\frac{(4ab+b)^2-(ab+4b)^2}{5b^2}+3(1-b)(1+b)\right]\cdot(a^2+b^2).$$

3. Dany jest punkt A o współrzędnych $(2;1)$. Punkt B jest punktem symetrycznym do punktu A względem początku układu współrzędnych. Punkt C jest punktem symetrycznym do punktu B względem prostej prostopadłej do osi Ox i przechodzącej przed punkt $(1{,}5;0)$, natomiast punkt D jest punktem symetrycznym do C względem punktu $(2;3)$. Oblicz pole czworokąta $ABCD$.

4. Po okręgu mającym długość 100 cm poruszają się ze stałymi prędkościami dwa ciała. Jeżeli poruszają się w przeciwnych kierunkach, to spotykają się co 5 sekund. Gdy poruszają się w tym samym kierunku, to jedno z tych ciał dogania drugie co 25 sekund.
   - Oblicz prędkości tych ciał.
   - Ile czasu zabiera każdemu z nich jedno pełne okrążenie?
   - O ile procent prędkość ciała poruszającego się szybciej jest większa od prędkości ciała poruszającego się wolniej?

5. W trapezie prostokątnym, krótsza przekątna długości 6 jest prostopadła do ramienia, ponadto kąt ostry trapezu ma miarę 60°. Oblicz obwód, pole oraz długość dłuższej przekątnej tego trapezu.

6. Iloczyn czterech kolejnych liczb całkowitych jest równy 1680. Znajdź te liczby.

7. Wśród 8 jednakowo wyglądających złotych monet jedna jest fałszywa, przy czym wiadomo, że jest ona lżejsza od pozostałych. Za pomocą dwukrotnego ważenia na wadze szalkowej bez korzystania z odważników znaleźć tę monetę.

Uwaga!
Rozwiązania powinny zawierać komentarze i uzasadnienia.

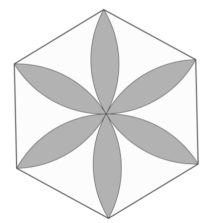
Życzymy powodzenia!

Test z matematyki
dla kandydatów do klasy uniwersyteckiej
Toruń, IV LO - 22 maja 2015

1. Wiedząc, że $a + b = 1$ oraz $b \neq 0$ uprość wyrażenie
$$\left(\frac{a^2 + b^2 + ab - 1}{(a + 2b)^2 - (b^2 + 1)}\right)^4,$$
a następnie oblicz jego wartość liczbową dla $a = \sqrt{2 - \sqrt{2}},\ b = 1 - \sqrt{2 - \sqrt{2}}.$

2. Czy istnieją liczby całkowite dodatnie $a,\ b,\ c$ takie, że $(a + b)(b + c)(c + a) = 245$?

3. Z każdego wierzchołka sześciokąta foremnego o boku długości 2 zakreślono łuki o promieniu długości boku sześciokąta (rysunek obok). Oblicz pole i obwód zacieniowanego obszaru.



4. Rozwiąż równianie z niewiadomą x:
$$\frac{-2{,}5 - 7{,}5 : (3{,}6 + x)}{13{,}625 - 5\frac{5}{14} \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3}\right)} \cdot \left(-\frac{43}{14}\right) = -\frac{5}{42}.$$

5. W układzie współrzędnych dane są punkty $A(0, a)$, $B(b, c)$, $C(0, 0)$ i $D(d, 0)$ przy czym $a > 0$,
$b < 0,\ c > 0,\ d > 0$. Wiadomo, że $|\sphericalangle ABC| = 90^\circ,\ |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle CAD|$ oraz $|AB| = 4,\ |BC| = 3$.
   - Oblicz $a,\ b,\ c$ i d.
   - Oblicz pole i obwód czworokąta $ABCD$.

6. Dwie grupy młodych turystów zamierzają spotkać się na trasie między schroniskami A i B odległymi o 30 km. Jeśli pierwsza grupa wyjdzie ze schroniska A o 2 godziny wcześniej niż druga grupa ze schroniska B, to obie grupy spotkają się po $2\frac{1}{2}$ godzinach marszu grupy, która wyszła później. Jeśli druga grupa wyjdzie ze schroniska B o 2 godziny wcześniej niż pierwsza ze schroniska A, to spotkanie nastąpi po 3 godzinach marszu grupy, która wyszła później. Z jaką średnią prędkością wędruje każda z grup i w jakiej odległości od schroniska A spotkają się grupy w obu przypadkach?

7. Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCDS$ o przekątnej podstawy długości 10 oraz krawędzi bocznej długości 13. Dokonano czterech cięć ostrosłupa $ABCDS$ przez jego wierzchołek S w taki sposób, że w podstawie odcięte zostały cztery trójkąty prostokątne o przyprostokątnych stanowiących $\frac{1}{5}$ długości boku kwadratu. W ten sposób otrzymano nowy ostrosłup o wierzchołku w punkcie S.
   - Sporządź rysunek do opisanej sytuacji.
   - Ile wierzchołków, ścian i krawędzi ma nowa bryła?
   - Oblicz objętość nowego ostrosłupa.
   - O ile procent objętość nowego ostrosłupa jest mniejsza od objętości ostrosłupa $ABCDS$?

Uwaga!
Rozwiązania powinny zawierać komentarze i uzasadnienia.

Życzymy powodzenia!

Test z matematyki
dla kandydatów do klasy uniwersyteckiej
Toruń, IV LO - 29 maja 2015

1. Oblicz
$$\frac{\frac{4}{29}\cdot 5{,}8-13{,}6:\left(0{,}75-\sqrt[3]{125}\right)}{(1{,}5)^2\cdot\left(\frac{13}{18}-\frac{5}{12}\right):\frac{5}{144}}:(0{,}(18)).$$

2. Do pewnej klasy uczęszczają chłopcy i dziewczęta, wśród nich Kasia i Jaś.
Kasia mówi: Mam w tej klasie 4 razy więcej kolegów niż koleżanek.
Jaś mówi: Ja mam o 13 kolegów więcej niż koleżanek.
Ile dziewcząt i ilu chłopców jest w tej klasie?

3. Uprość wyrażenie, a następnie oblicz jego wartość dla $a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $b=1-\sqrt{3}$.
$$\frac{(4ab-2b)^2}{16b^2}\cdot\frac{(4a^2+2a)^2}{a^2}+4\left(a-\frac{b}{2}\right)(2a+b)\,.$$

4. Ile jest liczb 7 cyfrowych zbudowanych tylko z cyfr 1 i 2, które są podzielne przez 12.

5. Zanieczyszczenia zboża stanowią 8% jego masy. Ile kilogramów zanieczyszczeń trzeba usunąć z 2 ton zboża, aby otrzymać zboże, w którym zanieczyszczenia będą stanowiły 4% masy?

6. Punkt $P=(a,b)$ jest punktem przecięcia odcinków AB i CD, przy czym $A=(0,10)$, $B=(8,0)$, $C=(3,0)$ i $D=(12,5)$. Znajdź współrzędne punktu P.

7. Trapez o podstawach długości 20 i 3, ramieniu długości $5\sqrt{2}$ oraz kącie ostrym przy tym ramieniu 45° obracamy wokół prostej zawierającej krótszą podstawę trapezu. W ten sposób otrzymujemy pierwszą bryłę obrotową. Następnie taki trapez obracamy wokół prostej zawierającej dłuższą jego podstawę i otrzymujemy drugą bryłę. Oblicz objętość każdej z tych brył oraz porównaj pola powierzchni całkowitej tych brył.

Uwaga!
Rozwiązania powinny zawierać komentarze i uzasadnienia.

Życzymy powodzenia!

Test z matematyki
dla kandydatów do klasy uniwersyteckiej

Toruń, IV LO - 17 maja 2016

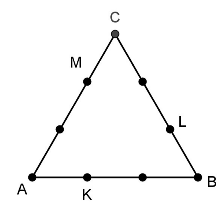
1. Uprość wyrażenie

$$\left[\left(2a+\frac{1}{4}b\right)^2-\left(\frac{1}{4}a+2b\right)^2-\left(\frac{a+b}{4}\right)\cdot\left(\frac{b-a}{4}\right)\right]\cdot\left[(a+b)^2-2ab\right],$$

a następnie oblicz jego wartość liczbową dla $a=\sqrt{1+\sqrt{2}},\ b=\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

2. Antykwariusz zakupił dwie książki za łączną sumę 75 zł, a sprzedał je z 22% zyskiem. Na sprzedaży tańszej książki zarobił 25% ceny jej zakupu, a na sprzedaży droższej 20%. Za ile złotych antykwariusz zakupił każdą z tych książek?

3. Każdy z boków trójkąta równobocznego ABC podzielono na trzy równe części. Spośród punktów podziału wyróżniono punkty K, L i M jak na rysunku. Oblicz pole trójkąta ABC wiedząc, że promień okręgu wpisanego w trójkąt KLM ma długość 6.

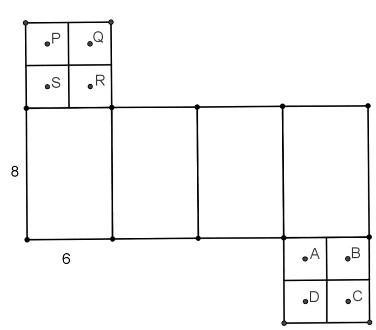


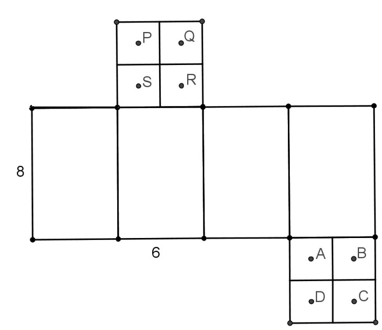
4. Oblicz: $\dfrac{-\frac{12}{0,4}:\left(0,6-9\cdot\frac{28}{45}\right)-10\cdot(0,5)^3}{(0,3)^2:(-0,12)-(-1,5)^2}:1,58(3)$.

5. W układzie współrzędnych dane są punkty $A(-3,-2)$, $B_1(2,0)$ i $C_1(-2,5)$. Punkt B należy do prostej AB_1, punkt B_1 należy do odcinka AB i $|AB|=3|AB_1|$. Punkt C należy do prostej AC_1, punkt C_1 należy do odcinka AC i $|AC|=2|AC_1|$.
   - Znajdź współrzędne punktów B i C.
   - Oblicz pole trójkąta ABC.

6. Maciek mieszka w miejscowości A, a Jaś w miejscowości B. Chłopcy chcą się spotkać na trasie między A i B. Maćkowi przejście z A do B zajmuje 1 godz. 20 min. Jaś przechodzi z B do A w 2 godz. Jaś wyruszył z B o godzinie 10 : 00. Maciek wyszedł z A o kwadrans później. O której godzinie chłopcy spotkają się? Jaką część drogi z B do A przejdzie Jaś do momentu spotkania?

7. Na rysunku przedstawiono dwie różne siatki prostopadłościanu o podstawie kwadratu i podano długości jego krawędzi. Każdą z podstaw podzielono na cztery małe kwadraty oraz zaznaczono punkty A, B, C, D i P, Q, R, S będące środkami małych kwadratów. Z każdej z siatek tworzymy prostopadłościan. Oblicz długość odcinka łączącego punkty A i R w każdym z tych prostopadłościanów.





Uwaga!
Rozwiązania powinny zawierać komentarze i uzasadnienia.

Życzymy powodzenia!

Test z matematyki
dla kandydatów do klasy uniwersyteckiej

Toruń, IV LO - 24 maja 2016

1. Oblicz wartość niewiadomej x z równania:

$$\frac{\left(2\frac{38}{45} - \frac{1}{15}\right) : \left(x + \frac{8}{9}\right) + \frac{26}{99} \cdot \left(3\frac{3}{65}\right)}{\left(18\frac{1}{2} - \frac{124}{9}\right) \cdot \frac{1}{85}} \cdot 0{,}5 = 9.$$

2. Uprość wyrażenia A i B $\quad A = \left(2x + y - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(2x - y + \frac{1}{2}\right) + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2,$

$$B = \left(\frac{(x+y)^2 - x^2 - y^2}{2} \cdot y - 2x\right) \cdot \left(\frac{(x-y)^2 - x^2 - y^2}{2} \cdot y - 2x\right),$$

a następnie oblicz wartość liczbową wyrażenia $B - A$ dla $\quad x = \frac{1+\sqrt{5}}{5},\ y = \sqrt{5}.$

3. Do zbiornika prowadzą dwie rury. Otworzono zawór pierwszej rury, a po trzech minutach także zawór drugiej rury. Po dalszych pięciu minutach w zbiorniku było 340 litrów wody. Gdyby na początku otworzono zawór drugiej rury, a po trzech minutach także zawór pierwszej rury, to po upływie kolejnych pięciu minut w zbiorniku byłoby 310 litrów wody. Ile litrów wody wpływa do zbiornika przez każdą z rur w ciągu jednej minuty?

4. Dane są trzy okręgi współśrodkowe o promieniach $r_1,\ r_2,\ r_3$ przy czym $r_1 < r_2 < r_3$ i $r_2 =\ 12$. Długość okręgu środkowego jest o 20% większa od długości okręgu najmniejszego i o 20% mniejsza od długości okręgu największego. O ile procent pole pierścienia zawartego między okręgami o promieniach r_2 i r_3 jest większe od pola pierścienia zawartego między okręgami o promieniach r_1 i r_2?

5. Punkt $O(2,1)$ jest punktem przecięcia przekątnych równoległoboku $ABCD$, przy czym wierzchołek A ma współrzędne $(-4,-2)$, a wierzchołek B ma współrzędne $(6,-8)$.

   a) Podaj współrzędne punktów C i D.

   b) Oblicz pole równoległoboku $ABCD$.

6. W rombie wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta rozwartego rozcina przeciwległy bok na odcinki długości 2 i 3. Oblicz długości przekątnych tego rombu. Rozważ wszystkie możliwe przypadki.

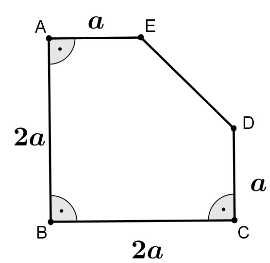
7. Z drutu utworzono ramkę w kształcie pięciokąta przedstawionego na rysunku obok. Następnie wykonano trzy oddzielne eksperymenty:

   I obrócono ramkę wokół prostej AB,

   II obrócono ramkę wokół prostej CD,

   III obrócono ramkę wokół prostej DE.

   Narysuj trzy bryły obrotowe, które powstały w wyniku tych eksperymentów. Oblicz objętość jednej z tych brył przyjmując, że $a = 3$.



Uwaga!
Rozwiązania powinny zawierać komentarze i uzasadnienia.

Życzymy powodzenia!

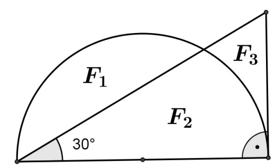
Test z matematyki
dla kandydatów do klasy uniwersyteckiej

Toruń, IV LO - 31 maja 2017

1. Uprość wyrażenie
$$\left(1-\frac{a}{2}+\frac{a^2}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{a}{2}-\frac{a^2}{2}\right)-\left(\frac{a}{2}\right)^2\cdot(2a-1)-\left(\frac{2-a^2}{2}\right)^2,$$
a następnie oblicz jego wartość liczbową dla $a=2-\sqrt{2}$.

2. Z cyfr 1 i 4 tworzymy wszystkie możliwe zapisy liczb sześciocyfrowych.
   (a) Ile jest wśród nich liczb podzielnych przez 9 i jednocześnie parzystych?
   (b) Ile jest wśród nich liczb podzielnych przez 36?

3. Rozważmy półokrąg o średnicy długości 18. Średnica ta stanowi jedną z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego o kącie ostrym przy tej przyprostokątnej równym 30°. Oblicz pola figur F_1, F_2 i F_3oraz obwód figury F_3 (patrz rysunek).

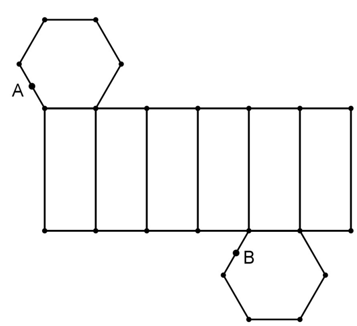


4. Oblicz: $\dfrac{\left[\left(1{,}3-0{,}3\cdot\frac{7}{4}\right):7\frac{3}{4}\right]^2}{0{,}42\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{7}\right)}:\left[\dfrac{14}{11}-\dfrac{3}{5}:\left(\dfrac{1}{10}\cdot\sqrt[3]{24}\cdot\sqrt[3]{9}\right)\right]:0{,}2(18).$

5. Punkty $A=(-2,6)$ i $B=(8,1)$ są wierzchołkami czworokąta $ABCD$, a punkt $S=(1,-1)$ jest środkiem obu przekątnych AC i BD tego czworokąta.
   (a) Znajdź współrzędne punktów C i D.
   (b) Oblicz pole czworokąta $ABCD$.
   (c) Zbadaj, czy $ABCD$ jest prostokątem.

6. Droga łącząca miejscowości A i B ma długość 24 km. Droga z A do B wiedzie najpierw pod górę, na wzgórze C, a potem prowadzi cały czas w dół aż do miejscowości B. Przyjmujemy, że rowerzysta jedzie pod górę z A do C oraz z B do C z tą samą prędkością V, która jest dwa razy mniejsza niż jego prędkość zjeżdżania z góry zarówno z C do B jak i z C do A. Rowerzysta pokonał trasę z A do B w ciągu 2,5 godziny, a jego powrót z B do A trwał o godzinę dłużej.
   (a) Ile czasu trwała jazda rowerzysty z A do C?
   (b) Z jaką prędkością rowerzysta jechał pod górę, a z jaką zjeżdżał w dół?
   (c) Jaki procent trasy z A do B stanowi podjazd?

7. Na rysunku przedstawiono siatkę graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego o krawędzi podstawy 6 i wysokości 12. Punkt A jest środkiem krawędzi jednej podstawy, a punkt B środkiem krawędzi drugiej podstawy (patrz rysunek).
Siatkę złożono i otrzymano z niej graniastosłup. Narysuj powstałą bryłę oraz zaznacz na niej pu A i B. Oblicz odległość między punktami A i B po zwinięciu siatki w graniastosłup.



Uwaga!
Rozwiązania powinny zawierać komentarze i uzasadnienia.

Życzymy powodzenia!

Test z matematyki
dla kandydatów do klasy uniwersyteckiej

Toruń, IV LO - 7 czerwca 2017

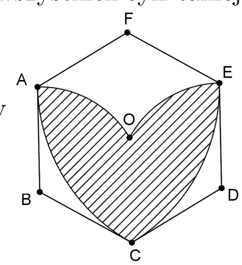
1. Uprość wyrażenie

$$\frac{1}{10}\cdot\Big[(2x-3y)^2+(2x+3y)^2+2(x-2y)(x+2y)\Big]\cdot\left(x^2-y^2\right)-x^2\cdot\Big[(x+y)^2-2xy\Big],$$

a następnie oblicz jego wartość liczbową dla $x=1-3\sqrt{2}$ i $y=-\sqrt{3}$.

2. Znajdź wszystkie liczby czterocyfrowe o tej własności, że iloczyn wszystkich cyfr takiej liczby jest równy 504, a cyfry tysięcy i jedności są nieparzyste.

3. Narysowano sześciokąt foremny $ABCDEF$ o boku długości a i środku symetrii w punkcie O. Następnie narysowano fragmenty okręgów o środkach w punktach B i D oraz promieniu a (łuki AO i EO) oraz fragmenty okręgów o środkach w punktach A i E oraz promieniach długości $|AE|$ (łuki EC i AC) - patrz rysunek. Oblicz pole i obwód zakreskowanej figury.

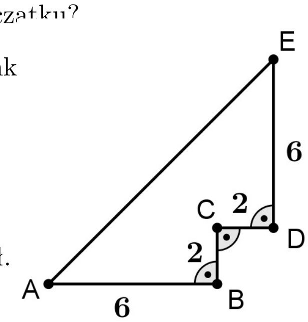


4. Rozwiąż równanie: $\dfrac{\frac{1}{3}-37\frac{1}{3}:3{,}5+1\frac{1}{11}\cdot\left(2\frac{2}{3}-1{,}75\right)}{\left(\frac{3}{7}-x\right):\frac{3}{28}-1}=-14.$

5. Punkty $A=(-2,3)$ i $B=(5,4)$ są wierzchołkami trójkąta ABC, a punkt $D=(2,-2)$ jest środkiem boku AC.
   (a) Znajdź współrzędne punktu C.
   (b) Oblicz pole trójkąta ABC.
   (c) Oblicz długość wysokości opuszczonej z wierzchołka C.

6. Dwie beczki zawierają łącznie 140 l wody. Z pierwszej beczki odlano do drugiej beczki tyle wody, że zawartość wody w drugiej beczce wzrosła o 75%. Następnie z drugiej beczki przelano do pierwszej tyle wody, że aktualna zawartość wody w pierwszej beczce wzrosła o 25%. Okazało się, że po tych dwóch operacjach w obu beczkach było tyle samo wody. Ile litrów wody było w każdej z beczek na początku?

7. Z drutu wykonano ramkę w kształcie pokazanym na rysunku obok. Ramkę obrócono raz wokół prostej DE otrzymując figurę obrotową B_1 oraz drugi raz, wokół prostej AE, otrzymując figurę obrotową B_2.
   (a) Naszkicuj obie bryły B_1 i B_2.
   (b) Oblicz objętość i pole powierzchni **jednej** z tych brył.



Uwaga!
Rozwiązania powinny zawierać komentarze i uzasadnienia.

Życzymy powodzenia!